Université de Picardie Jules Verne
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Feuille 5
Indépendance, lois images et changement de variables, fonctions caractéristiques

Indépendance et covariance

Exercice 1. Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Z := X^2 + Y^2$. Calculer la fonction de répartition F_Z de Z. Que peut-on dire de la loi de Z ?

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On pose $M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i$ et $m_n := \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

(1) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n en termes de F_{X_1}.

(2) Déterminer F_{m_n}.

(3) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $P(nm_n \leq x)$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$. On pose $Y := X^2$.

(1) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Z := \frac{X}{Y}$ (qui est bien définie avec probabilité 1 car $P(Y \neq 0) = 1$). À l'aide de la fonction de répartition, déterminer la loi de Z.

Lois images et changement de variables

Exercice 5. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Trouver la densité de $Y = X^k$ pour k entier ≥ 1.

Exercice 6. Soit X une v.a. de loi normale centrée réduite. Calculer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 7. Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X. Quelle est la fonction de répartition de $Y = |X|$? Quand X admet une densité f_X, montrer que Y admet aussi une densité f_Y qui s'exprime en fonction de f_X.

Exercice 8. Soit X une v.a. de densité f_X, et soit $Y = \frac{a}{X}$ avec $a \neq 0$. Trouver la densité f_Y de Y en fonction de f_X.

Exercice 9. Soit X une v.a. uniforme sur $]-\pi,\pi[$, et $Y = \sin(X)$. Montrer que Y admet la densité $f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\mathbb{1}_{]-1,1[}(y)$.

Exercice 10 (Simulation d'une variable aléatoire exponentielle)**.** Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit P la probabilité uniforme sur $]0,1[$ et $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\log\omega$. Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 11. Soit (X,Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité $f_{(X,Y)}$.

(1) Trouver la densité du couple $(Z,W) = (X+Y,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

(2) Trouver la densité de $Z = X+Y$.

(3) En déduire la densité de Z si X et Y sont indépendants de même loi : la loi uniforme sur $[0,1]$ (on admet qu'alors $f_{(X,Y)}$ est le produit des densités de X et Y).

Exercice 12. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbb{1}_{\{x>1,\, y>1\}}(x,y)$.

(1) Calculer les densités marginales de X et Y.

(2) Calculer la densité du couple $(U,V) = (XY, \frac{X}{Y})$, puis les densités marginales de U et V.

Exercice 13. Soit (X,Y,Z) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de densité $(x,y,z) \mapsto \frac{K}{(1+x+y+z)^4}\mathbb{1}_{\{x>0,\, y>0,\, z>0\}}$.

(1) Calculer K.

(2) Donner la loi de X, (X,Y) et $X+Y+Z$.

Exercice 14. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad W = \arctan \frac{X}{Y}, \quad -\pi/2 < W \leq \pi/2.$$

Montrer que Z suit une loi de Rayleigh (i.e. Z admet pour densité $f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(z)$), que W est uniforme sur $] - \pi/2, \pi/2[$, et que Z et W sont indépendantes.

Exercice 15 (Loi Gamma)**.** On appelle loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$ de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi de densité

$$f_{a,\lambda}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}\,.$$

(1) Reconnaître cette loi lorsque $a = 1$.

(2) Montrer que $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.

(3) Soit Z une v.a. de loi $\Gamma(a, 1)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $X = Z/\lambda$?

(4) Calculez la moyenne et la variance de Z et de $\Gamma(a, \lambda)$.

Fonctions caractéristiques

Exercice 16. Calculer la fonction caractéristique de X :

(1) si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$;

(2) si X suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$;

(3) si X suit une loi de Poisson de paramètre λ ;

(4) si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;

(5) si X suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (i.e. de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$) ;

(6) si X suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$.

Exercice 17. On effectue n essais d'une expérience, les succès étant indépendants, de probabilité $p = \frac{\lambda}{n}$. On note X_n le nombre total de succès.

(1) Donner la loi et la fonction caractéristique $\phi_{X_n}(t)$ de X_n.

(2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi_{X_n}(t) \to \phi(t)$ quand $n \to +\infty$, où ϕ est la fonction caractéristique d ?une loi que l'on précisera.

Exercice 18. Soit X de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et ϕ sa fonction caractéeristique.

(1) Montrer que $\phi'(t) = -t\sigma^2\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) En déduire $\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. On considère $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi. On suppose que $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = \sigma^2$ et on note ϕ la fonction caractéristique de X. On considère la variable aléatoire $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$.

(1) Donner la fonction caractéristique de Y_n, $\phi_n(t)$, en fonction de ϕ et n.

(2) Montrer que, lorsque $t \to 0$, on a $\phi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$.

(3) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\log \phi_n(t) \to -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2$, et donc que $\phi_n(t) \to \phi(t)$, où ϕ est la fonction caractéristique d'une loi que l'on précisera.

Exercice 20. Soit X une v.a. réelle.

(1) On note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z. Montrer que $\overline{\phi_X(u)} = \phi_X(-u) = \phi_{-X}(u)$.

(2) Montrer que si ϕ est une fonction caractéristique alors $|\phi|^2$ l'est aussi (*indication : prendre deux v.a. X et Y indépendantes de fonction caractéristique ϕ, et considérer $Z = X - Y$*).

Exercice 21. Les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont-elles des fonctions caractéristiques d'une certaine variable aléatoire ?

Exercice 22. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de fonction caractéristique ϕ.

(1) Montrer que la loi de Z est invariante par rotation si et seulement s'il existe une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(u, v) = \psi(u^2 + v^2)$.

(2) On suppose que Z vérifie les conditions du (1) et aussi que X et Y sont indépendantes. On note ϕ_X et ϕ_Y les fonctions caractéristiques de X et de Y.

(a) Exprimer ϕ en fonction de ϕ_X et ϕ_Y, puis exprimer ϕ_X et ϕ_Y en fonction de ψ. Vérifier que ϕ_X et ϕ_Y sont paires et qu'elles prennent donc des valeurs dans $\mathbb{R}$.

(b) Déduire du (a) une relation vérifiée par ψ puis montrer que ψ ne peut s'annuler.

(c) Montrer que X (et de même Y) suit une loi normale centrée de variance 2λ où $\lambda = -\log \psi(1)$.

(d) Si $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$ avec $R > 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Quelles sont les lois de θ et de R ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, $S_k := X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

(1) Calculer la loi de $(S_1, \ldots, S_n)$.

(2) Montrer que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ admet la densité de probabilité

$$f_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

(3) Que vaut la fonction caractéristique de S_n ?

(4) Calculer de deux manières $E(S_n)$ et $V(S_n)$.